PART2 方程式の実数解の個数

要点整理と公式

要点 ① 方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数である。このことを利用して，$y=f(x)$ のグラフの概形をかき，共有点の個数を考え，実数解の個数を求める。

(ex) 方程式 $e^x=x+2$ の異なる実数解の個数

$f(x)=e^x-x-2$ とおくと $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$

よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

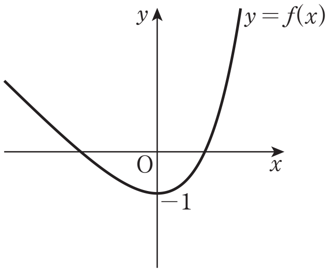
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

また $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-x-2\right)=$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x-2\right)$

$$=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=\infty$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。



よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は 2 個であることから，求める方程式の実数解の個数は 2 個である。

要点 ② 定数分離

a を定数とするとき，方程式 $\log x=ax$ の異なる実数解の個数を求める。

真数条件より $x>0$

よって $\log x=ax \iff \dfrac{\log x}{x}=a$

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると $x=e$

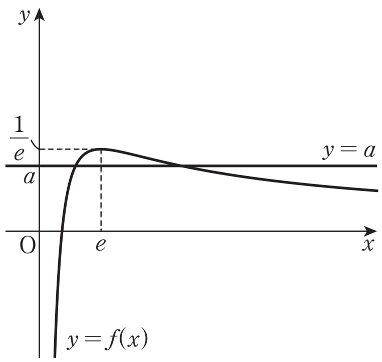
よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\frac{1}{e}$	↘

また $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。



$y=f(x)$ と直線 $y=a$ のグラフの共有点の個数が求める方程式の実数解の個数であることから

$0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき 2 個

$a=\dfrac{1}{e}$，$a\leqq 0$ のとき 1 個

$a>\dfrac{1}{e}$ のとき 0 個

2 (1) 方程式 $x=\cos x$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2) a を定数とする。方程式 $e^x=ax$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ であることを用いてもよい。

Point Pickup

方程式の実数解の個数と定数分離

方程式 $f(x)=0$ の実数解の個数 $\Longleftrightarrow$ 関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数

$y=f(x)$ のグラフの概形をかき，共有点の個数を考える。

とくに，$f(x)$ に含まれる文字定数(文字係数)a が 1 次式の場合は，変数 x と定数 a を分離して，$\boxed{}=a$ の形に変形させることにより，$\boxed{}$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を考える方法が有効である。

第13講 PART2 確認問題

1 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，方程式 $\sin x = 2x-1$ の異なる実数解の個数を求めよ。

ただし，[ア] ～ [ウ] は下の選択肢のうちから選べ。

$f(x) = \sin x-(2x-1)$ とおいて，$f'(x)$ を調べると，

$f(x)$ は単調に [ア] することがわかる。

また，$f(0)$ [イ] 0，$f(2\pi)$ [ウ] 0 であるから，

$y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフと x 軸との共有点の個数は

[エ] 個である。

よって，方程式の実数解の個数は，[オ] 個

[[ア] の選択肢]

① 増加　　② 減少

[[イ], [ウ] の選択肢]

① ＞　　② ＜　　③ ＝

2 a を定数とする。方程式 $ae^{-x}=x-1$ の異なる実数解の個数を調べよ。

ただし，$\lim_{x \to -\infty} xe^{x}=0$ であることを用いてもよい。

［カ］，［キ］ は下の①～④のうちから選べ。

$ae^{-x}=x-1$ を変形すると，

［カ］$=a$

$f(x)=$［カ］とおいて，$f(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフと直線［キ］の共有点の個数を求める。

この結果，方程式 $ae^{-x}=x-1$ の実数解の個数は次のようになる。

［クケ］$<a<$［コ］のとき，　2 個

$a=$［クケ］，$a\geqq$［コ］のとき，1 個

$a<$［クケ］のとき，　0 個

［［カ］の選択肢］

① $(x-1)e^{x}$　② $(x-1)e^{-x}$

③ $x-1-e^{-x}$　④ $e^{x}-x+1$

［［キ］の選択肢］

① $y=0$　② $y=a$

③ $x=a$　④ $y=x-1$

[MEMO]

PART2 方程式の実数解の個数

2 (1) 方程式 $x=\cos x$ の異なる実数解の個数を求めよ。

(2) a を定数とする。方程式 $e^x=ax$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ であることを用いてもよい。

[解答]

(1) $f(x)=x-\cos x$ とおくと $f'(x)=1+\sin x \geqq 0$

$f'(x)=0$ となるのは $x=\frac{3}{2}\pi+2\pi\times n$ (n は整数)のときのみ

よって $f(x)$ は単調に増加する。

また $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-\cos x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-\cos x)=\infty$

したがって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は 1 個であることから，

求める方程式の実数解の個数は 1 個である。

(2) $x=0$ はこの方程式の解ではないので

$$e^x=ax \iff \frac{e^x}{x}=a$$

$f(x)=\frac{e^x}{x}$ とおくと　$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$

よって，$f(x)$ の増減は右のようになる。

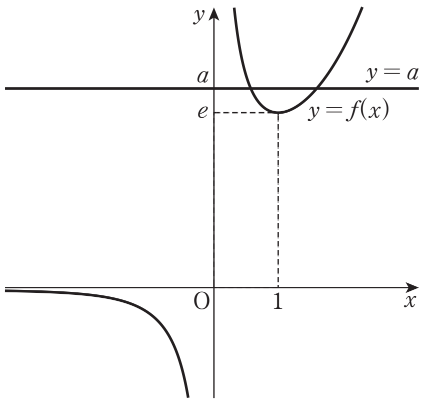
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	／	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	／	↘	e	↗

また $\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{e^x}{x}=\infty$

$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{e^x}{x}=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$



したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図。

$y=f(x)$ と直線 $y=a$ のグラフの共有点の個数が

求める方程式の実数解の個数であることから

$a>e$ のとき 2 個

$a=e$，$a<0$ のとき 1 個

$0 \leqq a<e$ のとき 0 個

第13講 PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イ：①，ウ：②，エ：1，オ：1

[解説]

$f(x) = \sin x - (2x-1)$ [A]

$= \sin x - 2x + 1$

とおくと，

$f'(x) = \cos x - 2 < 0$

よって，$f(x)$ は単調に**減少**する。[B]

また，$f(0) = \sin 0 + 1 = 1 > 0$

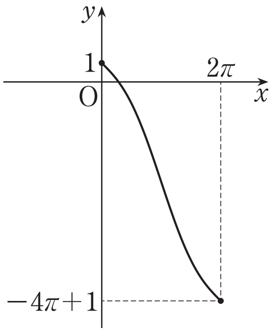
$f(2\pi) = \sin 2\pi - 4\pi + 1$

$= -4\pi + 1 < 0$

であるから，

$y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

のグラフと x 軸の共有点の個数は**1個**である。



[C]

すなわち，方程式

$\sin x = 2x - 1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

の実数解の個数は，

1個

[A]　$f(x) =$（左辺）$-$（右辺）とおいて，$f(x)$ の増減を調べる。

[B]　$f'(x) > 0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ は単調に増加
$f'(x) < 0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ は単調に減少

[C]　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で，x 軸と1点を共有する。

2

[正解] カ：①，キ：②，クケ：-1，コ：0

[解説]

$ae^{-x}=x-1$ の両辺に e^x をかけて，

$$a=(x-1)e^x$$

すなわち，$\boldsymbol{(x-1)e^x=a}$ [D]

> [D]　変数 x と定数 a を分離して，$(x$ の式$)=a$ の形に変形する。

$f(x)=(x-1)e^x$ とおくと，

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x-1)e^x$$
$$=xe^x$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

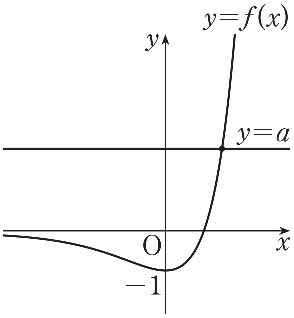
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)e^x=\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$ [E]

> [E]　x 軸が漸近線となる。

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



方程式 $ae^{-x}=x-1$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $\boldsymbol{y=a}$ の共有点の個数に等しい。

その個数は，

$\boldsymbol{-1<a<0}$ のとき，　2 個

$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{a\geqq 0}$ のとき，1 個

$\boldsymbol{a<-1}$ のとき，　0 個